

Les équations de Navier–Stokes : de l'intuition moléculaire au problème du millénaire

Un panorama historico-mathématique

A. N. Ivanov, M. S. Petrova

Résumé

Les équations de Navier–Stokes constituent le modèle mathématique central décrivant le mouvement d'un fluide visqueux. Depuis leur apparition dans la première moitié du XIXe siècle, elles ont profondément transformé les domaines les plus variés — de la construction aéronautique à la modélisation du flux sanguin. Cet article retrace l'histoire de l'émergence de ces équations, analyse la beauté de leur structure mathématique et l'étendue de leurs applications physiques, et explique pourquoi elles demeurent à ce jour un problème mathématique non résolu.

1 Introduction

Si la deuxième loi de Newton est l'âme de la mécanique du point matériel, les équations de Navier–Stokes sont la « deuxième loi de Newton » du mouvement des milieux continus. Ce système d'équations aux dérivées partielles non linéaires décrit tout : de l'écoulement de l'air autour d'une aile à la circulation du sang dans les artères. Pourtant, ses racines théoriques reposent sur un fondement quelque peu maladroit : les premiers auteurs qui ont dérivé l'équation ne comprenaient pas entièrement ce que signifiait le terme qu'ils introduisaient.

2 Trame historique : un relais de plus de vingt ans

La naissance des équations de Navier–Stokes n'est pas le mérite d'un seul homme. Au XVIIIe siècle, Bernoulli, d'Alembert et Euler construisirent les équations du mouvement d'un fluide parfait, mais négligèrent totalement la viscosité. De là naquit le célèbre « paradoxe de d'Alembert » : en théorie, un corps se déplaçant dans un fluide parfait ne subit aucune résistance, ce qui contredit manifestement la réalité.

En 1822 l'ingénieur français Louis Navier présenta à l'Académie des sciences de Paris son premier travail tenant compte des effets de la viscosité. La motivation de Navier était purement technique : en étudiant la théorie des ponts suspendus, il découvrit que, selon la théorie du fluide parfait, la résistance d'une pile de pont dans l'eau est nulle — une absurdité manifeste. Navier introduisit un terme correctif fondé sur les notions de forces intermoléculaires, sans toutefois le relier explicitement au concept de « viscosité ». En raison du caractère technique de son travail, son mémoire resta dans les archives de l'Académie jusqu'en 1827 [3].

Au cours des vingt années suivantes, Cauchy, Poisson, Saint-Venant et d'autres se joignirent au sujet. Saint-Venant, en 1843, fut le premier à identifier correctement la nature du terme supplémentaire dans les équations de Navier — il s'agit du coefficient de viscosité, et non d'une simple correction de forces moléculaires [1]. En 1845 le physicien mathématicien anglais George Gabriel Stokes, partant de la notion de « contraintes internes », construisit indépendamment une théorie complète du mouvement des fluides visqueux et donna aux équations la forme utilisée encore aujourd'hui [5]. Ironie du sort, Stokes ignorait alors les travaux de son collègue français.

Ce n'est qu'en **1934** que Prandtl introduisit officiellement dans la littérature l'appellation « les équations dites de Navier–Stokes », consacrant ainsi cette contribution inter-séculaire à ses deux pionniers [4].

3 La beauté de l'équation : le monde physique en quatre termes

Pour un fluide incompressible, la forme vectorielle des équations de Navier–Stokes est à la fois concise et profonde :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

Chacun des quatre termes a son propre rôle physique :

- **Terme institutionnaire** $\partial \mathbf{v} / \partial t$: variation locale de la vitesse du fluide dans le temps.
- **Terme convectif** $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$: l'âme de l'équation et la source de toutes les difficultés. C'est lui qui rend l'équation non linéaire, de sorte que la somme de deux solutions n'est plus une solution. La cascade turbulente d'énergie — des grands tourbillons aux petits — prend ici son origine.
- **Terme de gradient de pression** $-\nabla p / \rho$: la pression comme force assurant le respect de la condition d'incompressibilité.
- **Terme visqueux diffusif** $\nu \Delta \mathbf{v}$: provient des contraintes visqueuses d'un fluide newtonien, est proportionnel à la viscosité et domine en régime laminaire.

La beauté de l'équation tient à ce que la deuxième loi de Newton y est traduite dans le langage des champs, et que le mécanisme de dissipation — la viscosité — est élégamment incorporé dans la structure.

4 Limites d'applicabilité : où l'équation fonctionne et où elle échoue

Les équations de Navier–Stokes ne sont pas toutes-puissantes. Leur applicabilité est limitée par deux paramètres clés.

Nombre de Reynolds (Re). L'équation elle-même est capable de décrire la turbulence, mais seulement au sens de la simulation numérique directe. Pour des nombres de Reynolds inférieurs au critique, l'équation décrit un écoulement laminaire ; en régime turbulent, la solution exacte est extrêmement sensible aux conditions initiales, et le caractère chaotique rend une prévision ponctuelle irréaliste. En pratique, on passe aux équations de Navier–Stokes moyennées selon Reynolds (RANS), en les fermant par des modèles de turbulence. C'est un **Nombre de Knudsen (Kn)** et lorsque $Kn \ll 1$, l'hypothèse de milieu continu est valide et les équations de Navier–Stokes sont applicables ; dans la zone de glissement $10^{-2} \leq Kn \leq 10^{-1}$, il est nécessaire d'introduire une condition de glissement à la paroi ; pour des nombres de Knudsen encore plus grands, le cadre même du milieu continu s'effondre et il faut passer à l'équation de Boltzmann ou à la dynamique moléculaire.

5 Une valeur impérissable : de la soufflerie aérodynamique au problème du millénaire

Le domaine d'application des équations de Navier–Stokes couvre pratiquement toutes les sciences et disciplines d'ingénierie liées au mouvement des fluides. Dans l'industrie

aérospatiale, elles servent au calcul de la traînée et de la portance des aéronefs, notamment pour la prédiction des ondes de choc en vol supersonique : les expériences en soufflerie sont coûteuses et difficilement réalisables sans perturber l'écoulement, c'est pourquoi la mécanique des fluides numérique (CFD) devient un outil indispensable. En médecine, elles servent à modéliser le flux sanguin dans l'aorte et à évaluer la qualité des conceptions de stents ; l'Agence américaine des produits alimentaires et médicamenteux (FDA) envisage même d'exiger une validation mathématique obligatoire des stents [6]. En météorologie, la prévision numérique du temps est par essence la résolution des équations de Navier–Stokes pour l'atmosphère (en tenant compte de la force de Coriolis et des couplages thermodynamiques).

Mais le charme le plus profond de l'équation réside peut-être dans le fait qu'elle dévoile les frontières de la connaissance. L'existence d'une solution globale régulière pour les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles — autrement dit, le champ de vitesse n'« explose »-t-il pas jusqu'à l'infini — n'est à ce jour toujours pas démontrée. C'est l'un des sept « problèmes du millénaire » de l'Institut de mathématiques Clay, doté d'un prix d'un million de dollars [2]. Le mathématicien Vladimir Šverák l'a commenté avec un humour noir : « Il y a certainement des moyens plus simples de gagner ce million. »

6 Conclusion

L'histoire des équations de Navier–Stokes est un exemple classique de la façon dont l'intuition de l'ingénieur devance la compréhension théorique : Navier, partant de la résistance d'une pile de pont, écrivit une équation sans savoir qu'il avait saisi la viscosité ; Stokes, partant des contraintes internes, acheva la théorie sans savoir que son prédécesseur français avait déjà fait le premier pas. Près de deux siècles plus tard, ces équations restent l'outil quotidien de l'ingénieur et, simultanément, un abîme non résolu pour le mathématicien. Elles nous rappellent que la formule la plus pratique ne naît pas nécessairement des motivations théoriques les plus pures, et que l'équation la plus concise ne conduit pas nécessairement à la réponse la plus claire.

Bibliographie

- [1] A. J. C. B. de Saint-Venant. Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 17:1240–1242, 1843.
- [2] C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the navier–stokes equation. *Clay Mathematics Institute, Millennium Prize Problems*, 2000.
- [3] C. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6:389–440, 1827.
- [4] L. Prandtl. La mécanique des fluides visqueux. In W. F. Durand, éditeur, *Aerodynamic Theory*, volume 3, pages 34–208. Springer, 1934.
- [5] G. G. Stokes. Sur les théories du frottement interne des fluides en mouvement, et de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287–305, 1845.
- [6] U.S. Food and Drug Administration. Déclaration des études de modélisation computationnelle dans les soumissions de dispositifs médicaux — recommandations pour l'industrie. *Rapport technique*, FDA, 2016.