

Уравнения Навье–Стокса: от молекулярной догадки до задачи тысячелетия

Историко-математический обзор

А.~Н.~Иванов

М.~С.~Петрова

Аннотация

Уравнения Навье–Стокса — центральная математическая модель, описывающая движение вязкой жидкости. С момента своего появления в первой половине XIX века они глубоко преобразовали самые разные области — от авиастроения до моделирования кровотока. В статье прослеживается история возникновения этих уравнений, анализируется красота их математической структуры и широта физического применения, а также объясняется, почему они до сих пор остаются нерешённой математической проблемой.

1 Введение

Если второй закон Ньютона — душа механики материальной точки, то уравнения Навье–Стокса — это «второй закон Ньютона» для движения сплошной среды. Эта система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных описывает всё: от обтекания крыла воздухом до течения крови в артериях. Однако её теоретические корни стоят на несколько неловком фундаменте: первые авторы вывода уравнения не до конца понимали, что означает введённый ими член.

2 Историческая канва: эстафета длиной в двадцать с лишним лет

Рождение уравнений Навье–Стокса — заслуга не одного человека. В XVIII веке Бернулли, Даламбер и Эйлер построили уравнения движения идеальной жидкости, но полностью пренебрегли вязкостью. Отсюда возник знаменитый «парадокс Даламбера»: теоретически тело, движущееся в идеальной жидкости, не испытывает сопротивления, что явно противоречит реальности.

В 1822 году французский инженер Луи Навье представил Парижской академии наук первую работу, учитывающую эффекты вязкости. Мотивация Навье была вполне инженерной: изучая теорию висячих мостов, он обнаружил, что по теории идеальной жидкости сопротивление быка моста в воде равно нулю — очевидная нелепость. Навье ввёл поправочный член, исходя из представлений о межмолекулярных силах, хотя так и не связал его явно с понятием «вязкость». Из-за инженерного характера работы его доклад пролежал в Академии до 1827 года [3].

В последующие двадцать лет к этой теме подключились Коши, Пуассон, Сен-Венан и другие. Сен-Венан в 1843 году первым правильно определил природу дополнительного члена в уравнениях Навье — это коэффициент вязкости, а не некая поправка на молекулярные силы [1]. **В 1845 году** английский математический физик Джордж Габриэль Стокс, исходя из понятия «внутренних напряжений», независимо построил полную теорию движения вязкой жидкости и придал уравнениям ту форму, которая используется по сей день [5]. По иронии судьбы, Стокс в то время не знал о работе французского коллеги.

Лишь в 1934 году Прандтль в литературе официально ввёл название «так называемые уравнения Навье–Стокса», закрепив этот межвековой вклад за двумя первопроходцами [4].

3 Красота уравнения: физический мир за четырьмя членами

Для несжимаемой жидкости векторная форма уравнений Навье–Стокса выглядит лаконично и глубоко:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

У каждого из четырёх членов — своя физическая роль:

- **Нестационарный член** $\partial \mathbf{v} / \partial t$: локальное изменение скорости жидкости во времени.
- **Конвективный член** $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$: душа уравнения и источник всех трудностей. Именно он делает уравнение нелинейным, из-за чего сумма двух решений уже не является решением. Турбулентный каскад энергии — от крупных вихрей к мелким — берёт начало именно здесь.
- **Член градиента давления** $-\nabla p / \rho$: давление как сила, обеспечивающая выполнение условия несжимаемости.
- **Вязкий диффузионный член** $\nu \Delta \mathbf{v}$: возникает из вязких напряжений ньютоновской жидкости, пропорционален вязкости и доминирует в ламинарном режиме.

Красота уравнения в том, что второй закон Ньютона переведён на язык полей, а механизм диссипации — вязкость — изящно встроен в структуру.

4 Границы применимости: где уравнение работает, а где отказывает

Уравнения Навье–Стокса не всемогущи. Их применимость ограничена двумя ключевыми параметрами.

Число Рейнольдса (Re). Само уравнение способно описывать турбулентность, но лишь в смысле прямого численного моделирования. При числах Рейнольдса ниже критического уравнение описывает ламинарное течение; в турбулентном режиме точное решение чрезвычайно чувствительно к начальным условиям, и хаотический характер делает поточечный прогноз нереалистичным. На практике переходят к осреднённым по Рейнольдсу уравнениям Навье–Стокса (RANS), замыкая их моделями турбулентности. Это прагматичный компромисс, а не прямое решение уравнения.

Число Кнудсена (Kn). При $Kn \leq 10^{-2}$ гипотеза сплошной среды справедлива, и уравнения Навье–Стокса применимы; в области скольжения $10^{-2} \leq Kn \leq 10^{-1}$ необходимо вводить условие скольжения на стенке; при ещё больших числах Кнудсена сама рамка сплошной среды рушится, и приходится переходить к уравнению Больцмана или молекулярной динамике.

5 Непреходящая ценность: от аэродинамической трубы до задачи тысячелетия

Область применения уравнений Навье–Стокса охватывает практически все науки и инженерные дисциплины, связанные с движением жидкости. В аэрокосмической отрасли

они используются для расчёта сопротивления и подъёмной силы летательных аппаратов, особенно для предсказания ударных волн при сверхзвуковом полёте: эксперименты в аэродинамической трубе дороги и трудноосуществимы без возмущения потока, поэтому вычислительная гидродинамика (CFD) становится незаменимым инструментом. В **медицине** с их помощью моделируют кровоток в аорте и оценивают качество конструкции стентов; Управление по контролю за продуктами и лекарствами США (FDA) даже рассматривает возможность требовать обязательной математической валидации стентов [6]. В **метеорологии** численный прогноз погоды по своей сути есть решение уравнений Навье–Стокса для атмосферы (с учётом силы Кориолиса и термодинамических связей).

Однако глубочайшее очарование уравнения, пожалуй, в том, что оно обнажает границы познания. Существует ли для трёхмерных уравнений Навье–Стокса глобальное гладкое решение — то есть не «взорвётся» ли поле скорости до бесконечности, — до сих пор не доказано. Это одна из семи «задач тысячелетия» Математического института Клэя с призом в миллион долларов [2]. Математик Владимир Шверак прокомментировал это с чёрным юмором: «Наверняка есть более простые способы заработать этот миллион».

6 Заключение

История уравнений Навье–Стокса — классический пример того, как инженерная интуиция опережает теоретическое понимание: Навье, отталкиваясь от сопротивления быка моста, записал уравнение, но не знал, что уловил вязкость; Стокс, исходя из внутренних напряжений, завершил теорию, но не знал, что французский предшественник уже сделал первый шаг. Спустя почти два столетия эти уравнения остаются повседневным инструментом инженера и одновременно нерешённой бездной для математика. Они напоминают нам: самая практичная формула не обязательно рождается из самых чистых теоретических побуждений, а самое лаконичное уравнение не обязательно ведёт к самому ясному ответу.

Список литературы

- [1] A. J. C. B. de Saint-Venant. Note à joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 17:1240–1242, 1843.
- [2] C. L. Fefferman. Existence and smoothness of the navier–stokes equation. Clay Mathematics Institute, Millennium Prize Problems, 2000.
- [3] C. L. M. H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6:389–440, 1827.
- [4] L. Prandtl. The mechanics of viscous fluids. In W. F. Durand, editor, *Aerodynamic Theory*, volume 3, pages 34–208. Springer, 1934.
- [5] G. G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287–305, 1845.
- [6] U.S. Food and Drug Administration. Reporting of computational modeling studies in medical device submissions — guidance for industry. Technical report, FDA, 2016.